

制御理論講話 (その11) —回転体の力学—

A Lecture on Control Theory (Part11)
—Dynamics for Rotational Rigid Body—

山崎 敬則, 渡利 久規, 山川 雄司*, 黒須 茂**

Takanori YAMAZAKI, Hisaki WATARI, Yuji YAMAKAWA*, Shigeru KUROSU**

1. はじめに

本稿は現代の「ロボット工学」の基礎にある回転体の力学について、その概念、運動方程式の導出を平易に解説したものである。

設計工学の昨年5月号に“ひずみゲージのはかりへの応用”と題して、ひずみゲージの大家との質疑応答形式で、その歴史、特徴、問題点といったトピックについて解説記事を掲載したところ、多くの読者から意外な反響をよんだ。

以下では、永年「ジャイロスコープと理論と応用」の仕事に従事してきたご隠居と「ジャイロスコープ」にまったく素人の長屋の住人八つあん、熊さんとの問答を想定して対話形式で、筆者の一人（山崎）がまとめている。

八つあん「先生、今日は回転体の力学について何でも尋ねてよいとおっしゃるので、力学の復習のつもりでいろいろ勉強させてください。ぼくは今日からロボットの研究室に配属されて、「多関節ロボットの制御問題」のテーマで研究しようと思っているのですが、過去の文献を渡されても、わけのわからぬ微分方程式が羅列されていて頭が痛くなるだけなんです。まったく、ニュートンという人も余計なことをしてくれたものとひたすら恨みますよ」

ご隠居「おいおい、ニュートンが1687年に「プリンキピア」を発表して、「力」とか「質量」とかの力学的概念をはっきりさせ体系をつくり、微分方程式をたてて、解析することを完成させたのには

まちがいはないが、剛体の運動に対してはオイラーが1758年に発表した論文だと思うよ。実験物理学者フーコーは1852年に「ジャイロスコープ」をつくって、地球の「才差運動」を説明したが、当時は「モーター」が生まれていなかったのだから「ジャイロスコープ」の応用に結びつかなかった。とにかく、19世紀のはじめ頃までにジャイロ力学の理論はほぼ完成の域に達していたといっ

熊さん「そうすると、これから話して下さる「回転体の力学」も200年以上も前に、その基礎はできていたんですか」

ご隠居「そりゃあ、そうだよ。だから、学校で正規の科目として「力学」が延々と教えられているんだよ。だから、先程の「多関節ロボット」にしても、論文で運動方程式を導いていたのでは煩雑になるだけの結果だけを示しているんだ。その運動方程式を導こうとすると、今日の話はどうしても避けては通れないだよ。

なるべく面倒なことは避けて、すでに論文にでている運動方程式をそのまま鵜呑みにして、市販のソフトを使って制御問題を論ずれば、でてきた結果は“新しい知見なし”で足下をすくわれることになるんだよ」

八つあん「ぼくの先輩でとてもコンピュータに詳しくて“コンピュータの神様”なんていわれている人がいますけど、そういう人でも“力学”をマスターしているんですね」

*) 平成14年度機械工学科卒業(東京大学大学院在学中)

**) 研究所“Crotech”

ご隠居「当たり前だよ。ソフトだけに頼って研究が片付くなんて考えているようでは、未来は暗い

ね、先輩で“この人は仕事ができる”と思われる人は、とにかく満遍なく勉強しているよ」

2. 回転座標系

ご隠居「とにかく、平易に解説するというのが主旨だから、ごまかされないように、なんでも尋ねてくれよ。初歩の力学では質点といって、ものの位置と質量だけを取り上げてその運動を問題にしてきた。ところが、現実問題として質点の数が多いとき、ものの位置、質量だけでなく、形や大きさが問題となり、当然のように物体の集まったシステムを質点系(system of particles)といい、とくに各質点間の距離が変わらないものを剛体(rigid body)という」

熊さん「昔、そんなことを習ったことがありますよ。現実には、剛体でないものが多いんでしょう？」

ご隠居「各質点間の距離が変化するということは、柔軟な構造をもつシステムとなり、人工衛星や生物工学では確かに問題となり、運動方程式は複雑になる。しかし、実在の物体では、その形を変えないものが多いので、剛体の概念だけで話は進められるのである」

八つあん「回転運動ということになると、どの軸に回転しているかが問題になりますから、当然、座標系を定義しなければいけませんね」

ご隠居「そうだ。まず、二つの座標系を定義して、剛体の中にとった位置ベクトルの微分演算子の間に、どのような関係があるのかを述べることにしよう。

一般に図1に示すように、慣性空間に対する静止座標系（以下では、単に慣性系という） O -XYZを考える。この慣性系に対してニュートンの運動に関する第2法則が適用されると理解されたい。

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1)$$

ここで、 m は物体の質量、 $\mathbf{F}$ は物体に加わる外力、 $\mathbf{R}$ は物体の位置ベクトルである。

慣性系 O -XYZに対して、原点 O を共有し、ある角速度 ω で回転している剛体に固定した回転座標系 O -xyz（以下では、単に回転座標系という）を考える。図1では話を簡単にするために平面内で

運動する2次元の場合を画いているが、3次元の場合にも適用できることはいうまでもない。 O -XYZ系と O -xyz系のそれぞれの軸の単位ベクトルを $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ 、 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ とする。

剛体内の任意の点 P は O -xyz系で運動しているとすると、位置ベクトル $\mathbf{R}$ は形式的に

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= X\mathbf{i}_0 + Y\mathbf{j}_0 & (O\text{-}XYZ\text{系}) \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} & (O\text{-}xyz\text{系}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のように2つの座標系で定義することができる」

八つあん「剛体内の任意の点 P は回転系 O -xyz系とともに動いているわけでしょう。剛体内では、各質点間の距離は変わらないのですから、 O -xyz系で動けるわけないじゃあ、ありませんか？」

ご隠居「たしかに、その通りだ。正しくいうと回転系の中で動いている任意の点の位置ベクトルといった方が適切かも知れないね。この場合には、剛体に付着しているゴキブリとでも考えてもらいたい。

位置ベクトル $\mathbf{R}$ 絶対速度を求めるのに時間微分すると、次のようになる。

$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_0 = \frac{dX}{dt} \mathbf{i}_0 + \frac{dY}{dt} \mathbf{j}_0 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0$ は慣性系の単位ベクトルであるから、その方向は変化しない定数ベクトルと考える。

同様に、回転系 O -xyzでの位置ベクトル $\mathbf{R}$ の絶対速度は、次のようになる。

$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} \quad (4)$$

(4)式において、 $d\mathbf{i}/dt$ ならび $d\mathbf{j}/dt$ には次のように考える。単位ベクトルであるから $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ （ドット

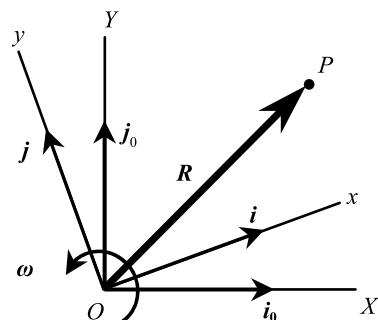


図1 回転座標系

“ $\cdot$ ” は内積を表わす) を時間微分すると,

$$2\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0 \quad (5)$$

となり, $d\mathbf{i}/dt$ は $\mathbf{i}$ と直交することになる. そこで, O -xyz の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ と定義する. (回転方向は右ねじの進む向きに $\boldsymbol{\omega}$ をとる) 形式的に

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \quad (6)$$

と書けるわけだよ (図2参照) 」

熊さん 「角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ とは, 力 $\mathbf{F}$ とか位置ベクトル $\mathbf{R}$ と違ってある約束のもとに定義するのですね」

ご隠居 「力 $\mathbf{F}$ とか位置ベクトル $\mathbf{R}$ は生まれたときからベクトルであって, 極性ベクトルとよんでいる. ところが, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ とかトルク $\mathbf{T}$ は人工的に創造されたベクトルであって, 軸性ベクトルとよんである約束 (右ねじの進む方向) のもとに生まれたのだ.

したがって, (4)式はつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_0 &= \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} \right) + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_\omega + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに, 左辺 $(d\mathbf{R}/dt)_0$ の 0 という添字は, 慣性系に対する時間微分であり, 右辺 $(d\mathbf{R}/dt)_\omega$ の ω という添字は, 回転系において運動している質点 P の相対運動による速度成分であり, 第2項が回転系の回転によって生じた速度成分である」

熊さん 「私たちは地球という回転系で生活しているわけですから, (7)式によれば教室の中で静止し

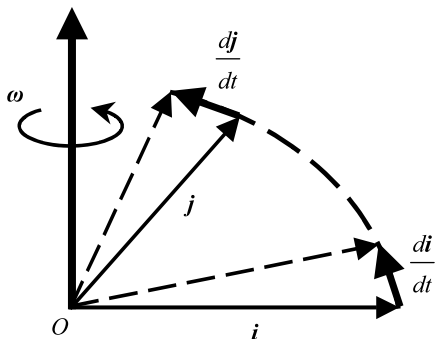


図2 角速度ベクトル

ていても, 回転による速度成分をもっているわけですね?」

ご隠居 「その通りじゃ. 以上は, 位置ベクトル $\mathbf{R}$ の時間微分について述べたが, このような演算は回転系のすべての力学量ベクトル $\mathbf{A}$ の時間微分についても同様になりたつ. つまり,

慣性系における微分演算と, これに対して角速度 ω で回転している回転系における微分演算との間にはつぎの関係がなりたつ」

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{A} \right)_0 = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{A} \right)_\omega + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (8)$$

八つあん 「 $(d\mathbf{A}/dt)_\omega$ は回転系を慣性系とみなした時間微分ですね. $\mathbf{A}$ のところに(7)式を代入すれば回転系からながめた質点 P の加速度 $(d\mathbf{V}/dt)_\omega$ がでてくるわけですね?」

ご隠居 「そういうことだ. 回転系からながめた加速度は慣性系から見た加速度に比べて, 色々やっかいな成分をもつことになる」

熊さん 「そういえば, コリオリの力 (Coriolis force) とか遠心力 (centrifugal force) といったみかけの力 (virtual force) をもつことを習ったことがありますが, (8)式から生まれたんですね¹⁾」

3. 慣性モーメント, 角運動量

ご隠居 「その昔, 東海テレビ『てれび博物館』という番組に「ギネスゴマに挑戦」のもとに直径90cmのこまを学生とつくったことがある. コマの寿命を永く伸ばすには慣性モーメント (moment of inertia) といって, 直線運動の慣性質量に相当する量を大きくして, はじめに大きな運動エネルギーを与えて, そしてまさつによるエネルギー損失をできるだけ小さくしてやればよい」

八つあん 「慣性モーメントというのは, (軸からの距離)² × (質量) の和で与えられるから, 式で表わすと,

$$I = \int r^2 dm \quad (9)$$

となり, 軸から離れたところにある質量がある形状ほど慣性モーメントの値は大きくなる. 曲芸用のコマなんか, 真中を薄くして外側を厚くするのはそのためなんでしょう? (図3参照) 」

ご隠居「その通りだよ。さて、剛体に固定された回転系の原点 O のまわりの運動量のモーメント(単に角運動量(angular momentum)という)を考えると、

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (10)$$

となり、ベクトルの三重積の公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

を用いると

$$= \boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r}^T \mathbf{r} dm - \int \mathbf{r} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\omega}) dm \quad (11)$$

となる。位置ベクトル $\mathbf{r}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (12)$$

を(11)式に代入すると、計算は省略して結果だけ示せばつぎのようになる。

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & -I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I\boldsymbol{\omega} \quad (13)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm, & I_{yy} &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm, & I_{xy} &= \int xy dm \\ I_{yz} &= \int yz dm, & I_{zx} &= \int zx dm \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とおき、 I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} を慣性モーメント(moment of

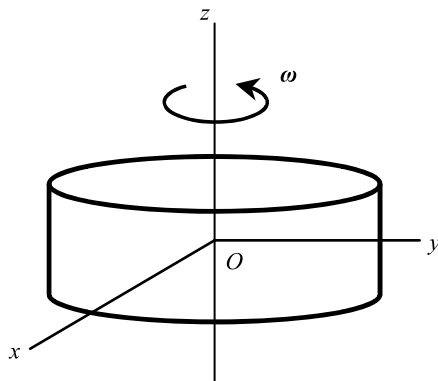


図3 回転体

inertia), I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} を慣性乗積(product of inertia), I は慣性テンソル(inertia tensor)とよばれている

(13)式において、原点 O を固定して座標系 O -xyzを回転させたとき、慣性乗積 I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} がちょうどゼロになる位置(対称)がある。このような場合の座標軸を慣性主軸 (principal axes of inertia) という。そのとき、慣性テンソルは対角マトリクスとなり、剛体の角運動量 $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I\boldsymbol{\omega} \quad (15)$$

となる。このような I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} を主慣性モーメント (principal moment of inertia)とよんでいる。これが工業力学演習でお馴染みの式じゃよ」

八つあん「例題では、円板のコマのように対称な物体ですが、ハート型、四角形のコマなんかずいぶん厄介になるわけですね？それで、運動方程式はどうなるんですか」

4. 剛体の運動方程式

ご隠居「さて、剛体の回転による速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ による質点の運動量のモーメントの総和である角運動量 $\mathbf{H}$ の時間的変化を考えてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \right\} \\ &= \sum \left\{ \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $m_i d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{F}_i$, $d\mathbf{r}_i/dt = 0$ であるから、外力 $\mathbf{F}_i$ によるモーメントの総和をトルク(torque) $\mathbf{T}$ とおけば

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{T} \quad (17)$$

となることがわかる。質点の数が無限個のとき、つまり質量がある領域全体にわたって分布しているときには、 Σ は積分記号 $\int$ となって、(14)式が定義され、(18)式が導かれる」

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{T} \quad (18)$$

熊さん「(18)式が剛体の動力学を問題にする場合には、基本となるのですね？」

ご隠居「そういうこと。これを言葉でいうと、『剛

体の角運動量の時間的変化は外力によるトルクに等しい』ということになる」

5. オイラーの運動方程式

ご隠居「図4に示すような剛体の運動方程式をたててみよう。ここでO-XYZは慣性系、O-xyzは剛体に固定した回転系とし、O-xyzの角速度を ω とする。剛体の回転運動についての運動方程式は、(18)式であるが、左辺についてO-xyzの座標系で表わすと、(8)式を用いて

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dH}{dt}\right)_\omega + \omega \times H \quad (19)$$

となる。第1項は角速度 ω で回転している座標系O-xyz上での時間微分であり、第2項は i, j, k が方向変化していることによる変化分であることは前に述べた通りである。

さて、O-xyz系において原点Oを質量の中心にとると

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k \\ H &= H_x i + H_y j + H_z k \\ T &= T_x i + T_y j + T_z k \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

と書け、(18)式を成分で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + (\omega_y H_z - \omega_z H_y) &= T_x \\ \frac{dH_y}{dt} + (\omega_z H_x - \omega_x H_z) &= T_y \\ \frac{dH_z}{dt} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x) &= T_z \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

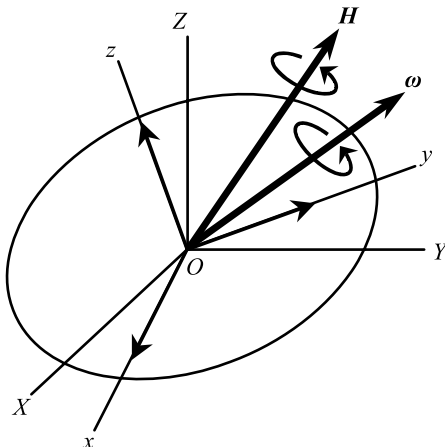


図4 回転座標系

となる」

八つあん「原点Oが質量中心でないときには、どうなるんです？」

ご隠居「そのとき、並進運動と回転運動とが干渉し合った運動方程式となる。つまり、O-xyzの原点Oの並進運動による速度を V_0 、質量の中心の位置ベクトルを r_c とすれば、(17)式は

$$\frac{dH}{dt} = T + m \frac{dV_0}{dt} \times r_c \quad (21)$$

となって、余計な項が干渉項となって現れる。だから、原点を質量の中心にとれば $r_c=0$ となって、並進運動と回転運動が分離されて、好都合なのじゃ。とくに、x, y, z軸が剛体の慣性主軸の方向に一致している場合には、(15)式より

$$H_x = I_x \omega_x, \quad H_y = I_y \omega_y, \quad H_z = I_z \omega_z \quad (23)$$

と表すと、(21)式は

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= T_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= T_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= T_z \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。この方程式をオイラーの運動方程式(Euler's equation of motion)とよんでいて、ジャイロ力学を専門とする人にはお馴染みの式である」

6. コマの運動

ご隠居「オイラーの運動方程式の応用例として、コマの運動をとり上げることにしよう。座標系は図5に示すように、つぎのように定義する。

O-XYZ : 慣性系 (単位ベクトル i_0, j_0, k_0)

O-x₁y₁z₁ : コマに瞬間固定した回転系 (単位ベクトル i_1, j_1, k_1)

O-xyz : コマに固定した回転系 (単位ベクトル i, j, k)

空間で運動するコマの方向を知るためには、コマに固定された回転系O-xyzが慣性系O-XYZに対して、どのような関係にあるかを調べなければならない。慣性系O-XYZと回転系O-xyzとのベクトル成分の変換式は、3つの独立な角度の組み合わせによって決まる。

さて、O-XYZをO-xyzへ一致させるのに、図5

に示すような順序で ϕ, θ, ϕ_0 の3回の回転を行う場合に、これらの角度を**オイラー角**(Eulerian angles)という。このときの変換式は、つぎのように計算される。

- 1° Z軸まわりの ϕ の回転によって、 O -XYZを O - $x_1Y'z_1$ に移す。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ Y' \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (25)$$

- 2° x_1 軸のまわりに θ の回転によって、 O - $x_1Y'z_1$ を O - $x_1y_1z_1$ に移す。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ Y' \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

- 3° z_1 のまわりの ϕ_0 の回転によって、 O - $x_1y_1z_1$ を O -xyzに移す。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 & 0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ご隠居「オイラーの運動方程式(24)式は O -xyzに対して立てた運動方程式である。そこでは $I_x, \dots, 1$ は時間とともに変動しないが、剛体に対して運動している座標系 O - $x_1y_1z_1$ では、慣性モーメントは一般に時間の関数 $I_x(t), \dots$ となる。ところが、こまのように剛体が回転軸に関して対称に構成されているならば、図6に示すように時間の関数ではなく、定数 $I_x, \dots$ となる。この事実はコマの運動や

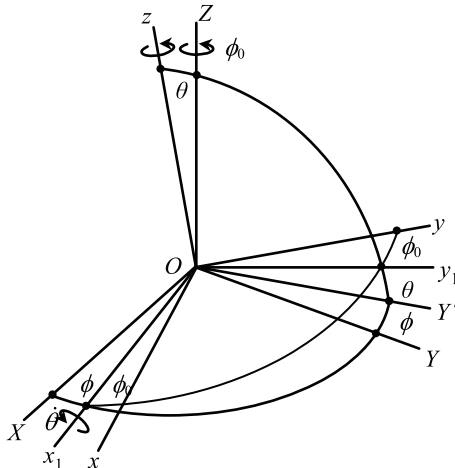


図5 オイラー角

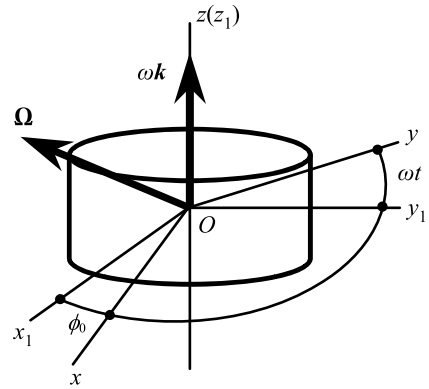


図6 瞬間固定座標系

ジャイロ計器のように、剛体の位置を問題とするのではなく、回転軸の方向だけを問題にする場合には都合のよい性質である。ここで、角速度をつぎのように定義する。

Ω ：コマに瞬間固定した座標系 O - $x_1y_1z_1$ の角速度

ω ：コマに固定した回転系 O -xyzの角速度
図6より、コマの空間に対する角速度 ω は、つぎのように表される。

$$\omega = \Omega + \phi_0 k \quad (28)$$

コマに瞬間固定した座標系 O - $x_1y_1z_1$ について、コマの運動方程式をたてると、(19)式にならって

$$\left(\frac{dH}{dt} \right)_0 = \left(\frac{dH}{dt} \right)_1 + \Omega \times H = T \quad (29)$$

となる。 H 、 Ω を成分で書くと

$$\left. \begin{aligned} H &= H_{x1}i_1 + H_{y1}j_1 + H_{z1}k_1 \\ \Omega &= \Omega_{x1}i_1 + \Omega_{y1}j_1 + \Omega_{z1}k_1 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となり、(29)式も成分で書くと

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{x1} + (\Omega_{y1}H_{z1} - \Omega_{z1}H_{y1}) &= T_{x1} \\ \dot{H}_{y1} + (\Omega_{z1}H_{x1} - \Omega_{x1}H_{z1}) &= T_{y1} \\ \dot{H}_{z1} + (\Omega_{x1}H_{y1} - \Omega_{y1}H_{x1}) &= T_{z1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となる。また、 H の各成分はそれぞれ

$$H_{x1} = I_{x1}\Omega_{x1}, \quad H_{y1} = I_{y1}\Omega_{y1}, \quad H_{z1} = I_{z1}\omega_{z1} \dots \quad (32)$$

と書ける。ここに、 Ω_{z1} は O - $x_1y_1z_1$ の角速度 Ω の z_1 成分であり、 ω_{z1} はコマの回転速度を含んだ角速度 ω の z_1 成分であることに注意してほしい。(32)

式を(31)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} I_{x1}\dot{\Omega}_{x1} + \Omega_{y1}(I_{z1}\omega_{z1} - I_{y1}\Omega_{z1}) &= T_{x1} \\ I_{y1}\dot{\Omega}_{y1} + \Omega_{x1}(I_{x1}\Omega_{z1} - \Omega_{x1}\omega_{z1}) &= T_{y1} \\ I_{z1}\dot{\omega}_{z1} + \Omega_{x1}\Omega_{y1}(I_{y1} - I_{x1}) &= T_{z1} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。さて、コマが z 軸に関して対称であると仮定すると

$$I_{z1}=I_z=I_0, \quad I_{x1}=I_{y1}=I_x=I_y=I_1 \quad (34)$$

となり、さらにまさつがない($T_{z1}=0$)と仮定すれば、(33)式はつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_{x1} + \omega_{1y1}(I_0\omega_{z1} - I_1\Omega_{z1}) &= T_{x1} \\ I_1\dot{\Omega}_{y1} + \omega_{1x1}(I_0\omega_{z1} - I_1\Omega_{z1}) &= T_{y1} \\ I_0\dot{\omega}_{z1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

座標系 $O-x_1y_1z_1$ の角速度 Ω は

$$\begin{aligned} \Omega &= \phi_0 \mathbf{k}_0 + \theta \dot{\mathbf{i}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \mathbf{i}_1 \text{ 成分} \\ \cdots \mathbf{j}_1 \text{ 成分} \\ \cdots \mathbf{k}_1 \text{ 成分} \end{matrix} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{i}_0 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j}_1 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}_0) \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (36)$$

であり、コマの角速度 ω は

$$\begin{aligned} \Omega &= \phi_0 \mathbf{k}_0 + \theta \dot{\mathbf{i}}_1 \\ &= \dot{\theta} \mathbf{i}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j}_1 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}_0) \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (37)$$

である。(35)式の第3式より

$$\omega_{z1} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}_0 = n = \text{定数} \quad (38)$$

がえられる。一方、重力によるトルクは、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} \\ &= (l \mathbf{k}_1) \times (-mg \mathbf{k}_0) \phi_0 \mathbf{k}_0 + \theta \dot{\mathbf{i}}_1 \\ &= (l \mathbf{k}_1) \times (-mg \sin \theta \mathbf{j}_1 - mg \cos \theta \mathbf{k}_1) \\ &= mgl \sin \theta \dot{\mathbf{i}}_1 \end{aligned} \quad (39)$$

以上、求められた式(36), (37), (38), (39)式を(35)式に代入すると、コマの運動方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta (I_0 n - I_1 \dot{\phi} \cos \theta) &= mgl \sin \theta \\ I_1 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) - \dot{\theta} (I_0 n - I_1 \dot{\phi} \cos \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(40)式からどのようなことがわかるかということとは力学の本にゆだねるとして、コマの軸が鉛直方向に対して一定の傾き θ_0 をなして運動するとき、 $I_0 n \gg I_1 \dot{\phi} \cos \theta$ と考えれば、 ϕ も一定であるから、コマの先端は一定の角速度で円運動する。このような運動を**定常歳差運動**(steady precession)とよんでいる。

7. プリセッション

ご隠居「コマが静かに回っているのを見たとき、“コマはなぜ倒れないか”という素朴な疑問をもつであろう。素朴な疑問というものはたいいてい答えるのが難しいもので、この場合もその例にもれない。

ここでは、剛体の力学から説明してみよう。高速回転した剛体の角運動量を $\mathbf{H}$ とすれば、コマの運動方程式は(29)式より

$$\left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_1 + \Omega \times \mathbf{H} = \mathbf{T} \quad (41)$$

と書ける。定常状態では、過渡的な変化 $(d\mathbf{H}/dt)_1$ を無視すると、

$$\Omega \times \mathbf{H} = \mathbf{T} \quad (42)$$

となる。つまり、 $O-x_1y_1z_1$ の角速度 Ω とコマの角運動量 $\mathbf{H}$ とのベクトル積は外部から加えられたトルク $\mathbf{T}$ に等しいことを意味する。

(42)式がコマの運動を説明するときの鍵となる。トルク $\mathbf{T}$ は $\mathbf{H}$ と Ω とに直角となり、 Ω は $\mathbf{H}$ と $\mathbf{T}$ とに直角となる。つまり、定常的に高速回転しているコマに、その角運動量 $\mathbf{H}$ に直角にトルク $\mathbf{T}$ を作用させるとき、コマの回転軸($\mathbf{H}$ の方向)は $\mathbf{T}$ の方向に一致するように回転する。これを**プリセッション**(precession)とよんでいる。(図7参照)

熊さん「このプリセッションという性質がジャイロ計器に使われている大切な性質のひとつなんですね？」

ご隠居「コマを支持棒(ジンバル(gimbal))を用いて重心で支えた装置をジャイロスコープ(gyroscope)とよばれている。このコマが回転して

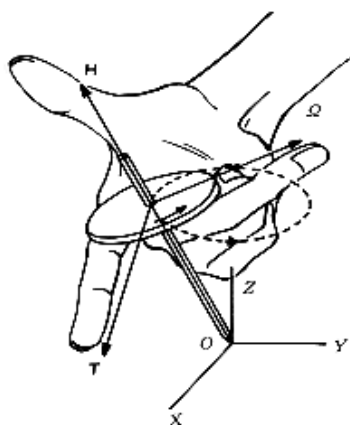


図7 プリセッション

いるとき、コマの角運動量 H はある方向を指している。外部からトルクが作用しないとすれば、コマの回転軸はあらかじめ定められた方向を指し続けることになる。これを「ジャイロの剛性」という。外部からトルク T が作用すれば、角運動量 H はトルク T の向きに一致するように、「プリセッション」を起こす。コマにはもうひとつの振動モードがあって、外部からインパルス状の力が作用すれば、「プリセッション」というコマの回転軸の円軌道上に、高周波の振動現象を起こす。これを「ニューテーション」とよんでいる。コマの運動には、他の力学系に全く見られない性質として、①ジャイロの剛性、②プリセッション、③ニューテーションがあり、ジャイロを応用した器械のほとんどがこの性質を利用している³⁾」

熊さん「回転してない剛体であるマニピュレータの運動方程式も、まったく同じような考えで導くことができるのですかね？」

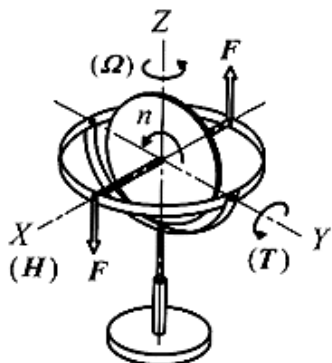


図8 ジャイロスコープ

ご隠居「紙面の制限で例題を省略したが、もちろん今までの理論展開を応用してくれば可能であると思っている。本稿では、ニュートンの運動法則からオイラーの運動方程式を導いているが、結局のところ、これが基本になると思う。仮想仕事の理のラグランジュ形式から運動方程式を導く方法や仮想動力の理から導く新しい方法も提案されている(Kane and Levinson, 1985)⁴⁾」

八つあん「論文なんか読んでみると、動作方程式としていきなり運動方程式がでてきますが、本当は座標系や空間上のオイラー角を定義して、面倒な計算をした結果なんですね」

ご隠居「きちんと計算してみると、教科書にでてる運動方程式でも間違えていることがよくあるんじゃない。だから、他人の結果なんかうかつに信用したら、大変なことになる」

八つあん「そこで先生のお得意の「学問は批判から」という哲学がでてくるわけですね。ぼくも早速、多関節ロボットの運動方程式をたててみることにします。それをこの講義のレポートとさせていただきます」

ご隠居「よい心がけだよ。もし、論文にでていた数学モデルが導かれれば、君にとって自信となる。また違っていても君の方が正しいことだって十分あり得る。そのときはまた尋ねてこい」

文献

- 1) 黒須茂編：ロボット力学，パワー社(1997)
- 2) 黒須茂：コマの不思議，山文社(1996)
- 3) 山崎敬則，黒須茂：ジャイロ式力（フォース）測定器，設計工学，日本設計工学会，Vol. 38 No.9, 471/476(2003)
- 4) Francis C. Moon：Applied Dynamics, Wiley & Sons, Inc., (1998)